# UNA APLICACIÓN DE LA COMBINATORIA EN LA MÚSICA

Miguel Moreno
University of Vienna
FWF Meitner-Programm

Seminario DiscreMath 2023

24 Abril, 2023

# Organizacion

Esta charla se basa en una pregunta hecha por el estudiante de música **Teodor Vulpoiu**, *https://teodorvulpius.com*. Esta charla fue preparada en colaboracion con Teodor Vulpoiu.

**Recomendación.** Para mas informacion sobre el tema, contactar a Teodor, *https://teodorvulpius.com*

- Motivación
- Reducciones
- Collares y acordes
- Conteos

# Como comparamos teorías

¿Se puede hacer de forma objetiva?

¿Cual teoría es mas compleja, los espacios vectoriales o el orden de los reales?

¿Interactúan las teorías entre si?

# La interacción

Se traduce la pregunta

Se responde la pregunta

Se traduce la respuesta

## Comparar teorías

Si todo modelo de la teoría $T_1$ se puede traducir en un modelo de la teoría $T_2$, entonces decimos que $T_1$ no es mas compleja que $T_2$.

# La importancia del contexto

A Diana le gusta el color azul. Ella usa un vestido azul.

Diana pitää sinisesta väristä. Hanellä on päällään sininen mekko

A Diana le gusta el color azul. El usa un vestido azul.

# Buenas traducciones entre teorías

Se traducen frases en frases

Elementos de la teoría $T_1$ se traducen en elementos de la teoría $T_2$

# Buenas traducciones entre teorías

La traducción es gramatical mente correcta

Se traducen modelos de la teoría $T_1$ en modelos de la teoría $T_2$

# Buenas traducciones entre teorías

Nada se traduce fuera de contexto

Modelos similares (cercanos) se traducen en modelos similares (cercanos)

# Matemáticamente

Si existe una función continua con dominio los modelos de $T_1$ y rango los modelos de $T_2$, entonces decimos que $T_1$ no es mas compleja que $T_2$.

# Estructuras

Enumeramos las relaciones $\mathcal{L} = \{P_n | n < \omega\}$.

**Definición**

Sea $\pi$ una biyección entre $\kappa^{<\omega}$ y $\kappa$. Para cada funcion $f : \kappa \to \{0, 1\}$ definimos la estructura $\mathcal{A}_f$ con dominio $\kappa$ y para cada tupla $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ en $\kappa^n$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \in P_m^{\mathcal{A}_f} \Leftrightarrow f(\pi(m, a_1, a_2, \dots, a_n)) = 1$$

# La relación de isomorfismo

**Definición** Dada una teoria $T$, decimos que dos functiones $f$ y $g$ con dominio $\kappa$ y rango $\{0, 1\}$ son equivalente modulo el isomorfismo de $T$, si se cumple una de las siguientes:

- $\mathcal{A}_f$ y $\mathcal{A}_g$ son modelos isomorfos de $T$
- $\mathcal{A}_f$ y $\mathcal{A}_g$ no son modelos de $T$

# La topologia

Sea $\kappa$ un cardinal tal que $\kappa^{<\kappa} = \kappa$.

Dotamos el conjunto $2^\kappa$ con la topologia acotada. Para toda funcion $\zeta : X \to \{0,1\}$, donde $|X| < \kappa$, el conjunto

$$[\zeta] = \{\eta : \kappa \to \{0,1\} \mid \zeta \subset \eta\}$$

es un abierto basico.

# Reducciones

Sean $E_1$ y $E_2$ relaciones de equivalencia sobre $2^\kappa$. Decimos que $E_1$ es *continuamente reducible* a $E_2$, si existe una funcion continua $f : 2^\kappa \to 2^\kappa$ que satisface $(x, y) \in E_1 \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in E_2$.

Lo denotamos por $E_1 \hookrightarrow_C E_2$.

# Turin

La reducción de Turing de un problema de decisión $A$ a un problema de decisión $B$ es una máquina oráculo que resuelve el problema $A$ dado un oráculo para $B$. Puede entenderse como un algoritmo que podría ser utilizado para resolver $A$ si tuviera disponible una subrutina para resolver $B$.

# Teorema de Cook–Levin

Todo problema de decisión NP es reducible al problema de satisfacibilidad booleana.

# Espacio vectorial y orden de los reales

**EV**: Existe un subconjunto de elementos independientes con los que se generan todos los elementos.

**OLD**: Todo elemento es generado por un subconjunto distinto.

**Teorema.** Si $\kappa > \aleph_0$, $\cong_{EV} \hookrightarrow_C \cong_{OLD}$.

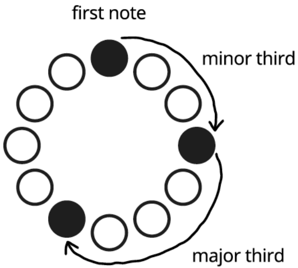
# Acordes

En música, un acorde se refiere a un grupo de tres o más notas que se tocan juntas para crear armonía.

Teóricamente, hay $2^{88} - 89$ acordes en un piano. Es raro ver acordes de mas de 7 notas. Mas de $6(10^9)$ acordes de a lo mas 7 notas. Son muchos y redundantes.

# Tonos equivalentes

Se usan clases de equivalencia para reducir los acordes.



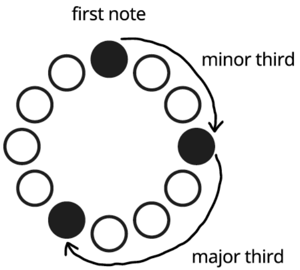
# Collares

Un collar $D$-ario de longitud $n$ es una clase de equivalencia de cadenas de $n$ caracteres sobre un alfabeto de tamaño $D$, tomando todas las rotaciones como equivalentes.

Representa una estructura con $n$ cuentas conectadas circularmente que tienen $D$ colores disponibles.

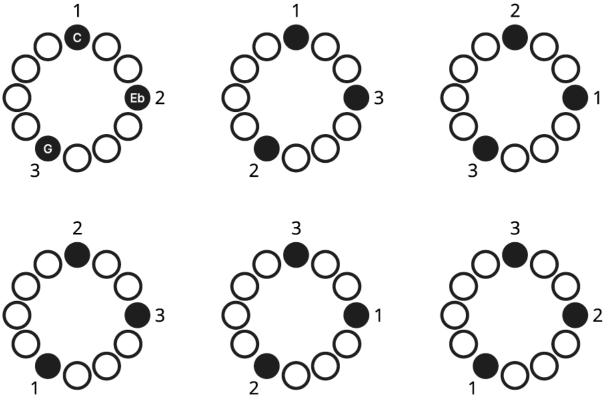
# Tonos equivalentes

Un acorde es un collar de longitud $n$ (el numero de notas) y dos colores (on/off).



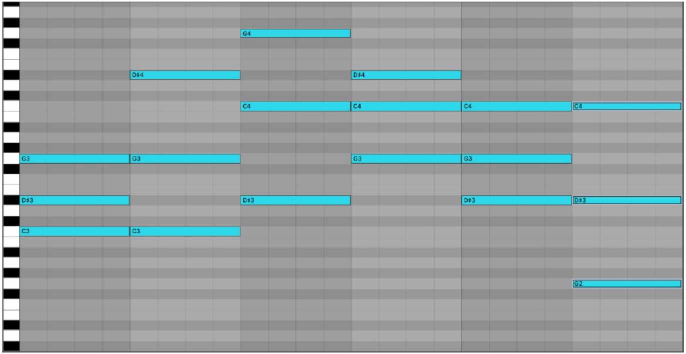
# Las equivalencias

El orden importa.



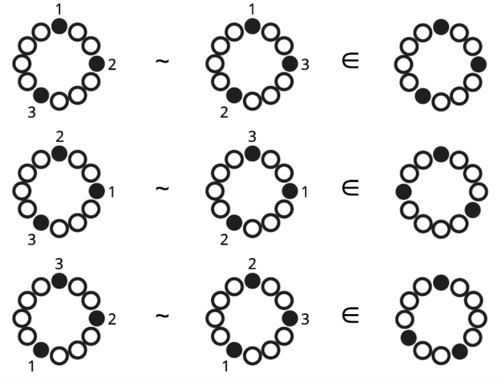
# Las equivalencias

Los sonidos.



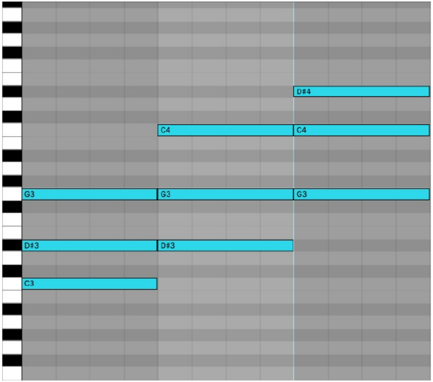
# Refinando las equivalencias

Los representastes.



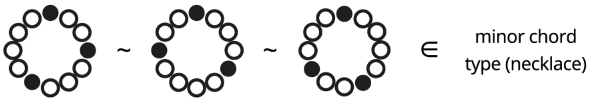
# Refinando las equivalencias

Los sonidos.



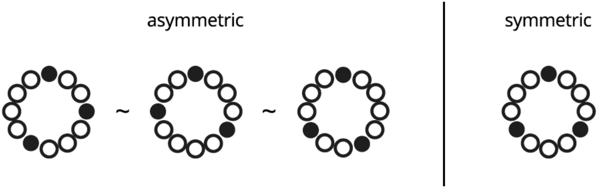
# Como ven los collares

Los elementos.

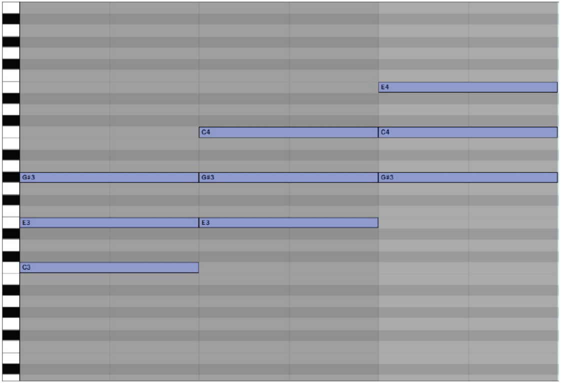


# Simetría en los acordes

Hay dos tipos de acordes, simétricos y asimétricos

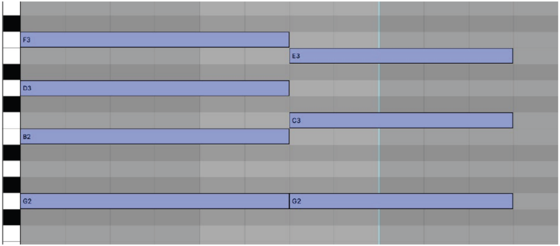


# Un acorde simétrico



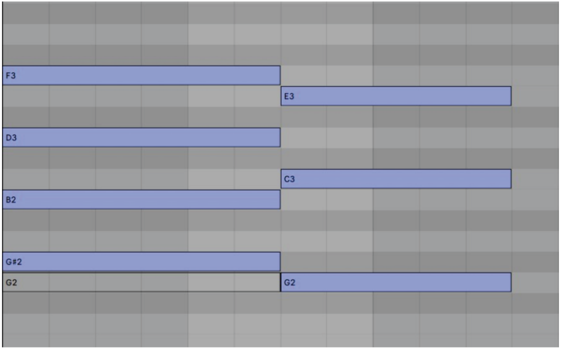
# Simétricos vs asimétrico

Acorde asimétrico.



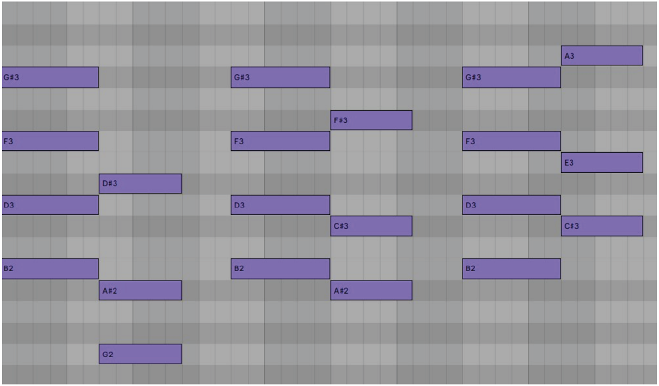
# Simétricos vs asimétrico

Acorde simétrico.



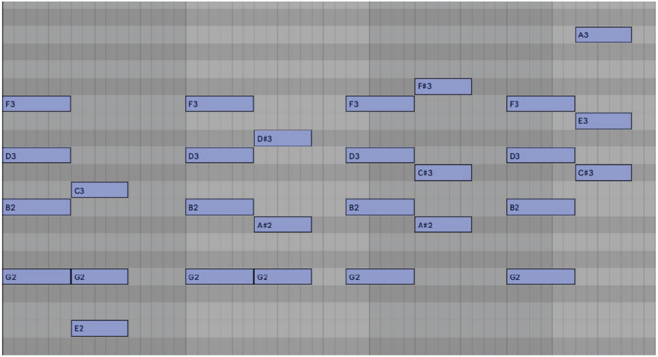
# Simétricos vs asimétrico

Ejemplo de su uso.



# Simétricos vs asimétrico

Ejemplo de su uso.



## Acordes

El numero de collares de $n$ caracteres con un alfabeto de dos elementos esta dado por la formula

$$N(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d) 2^{\frac{n}{d}}$$

donde $\varphi$ es la función de Euler.

# Numero de acordes

La formula es util para explorar los acordes, e.g. hay 19 diferentes clases de equivalencia de acordes de 3 notas.

Su uso necesita entender la función $\varphi$ de Euler y no nos da información sobre los elementos de la clase.

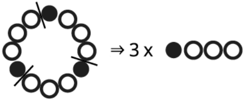
## Conteo recursivo

El numero de acordes se puede contar de forma recursiva:

- $N(n, k) = C^L(n, k) + C^R(n, k)$
- $C^R(n, k) = \sum_{1<d|gcd(n,k)} C^L(\frac{n}{d}, \frac{k}{d})$
- $C^L(n, k) = \frac{C(n,k) - C^R(n,k)}{k}$

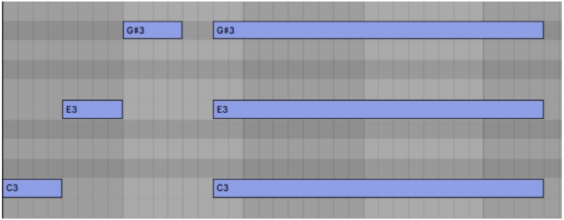
# Mas sobre acordes simétricos

Los acordes simétricos se pueden descomponer en acordes asimétricos.



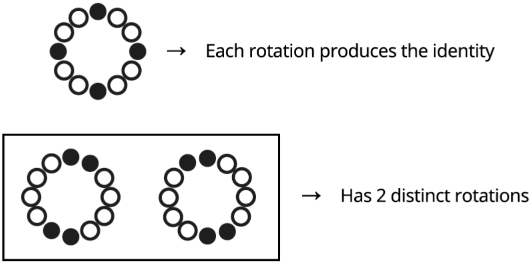
# Mas sobre acordes simétricos

El descomponer acordes simétricos en asimétricos, permite mezclar ambas nociones para el uso de acordes simétricos.



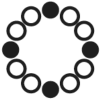
# El grado de simétria

Hay acordes que no son simétricos ni asimétricos. Estos acordes tienen otros usos.



# El grado de simétria

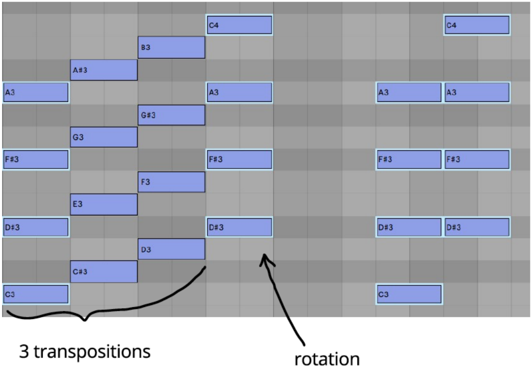
Grado de simétria 1.



# El grado de simétria

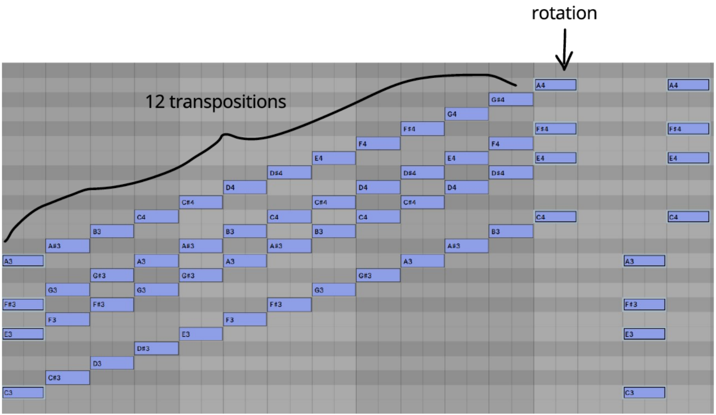
Grado de simetria 2.

# Grado 1 de simétria

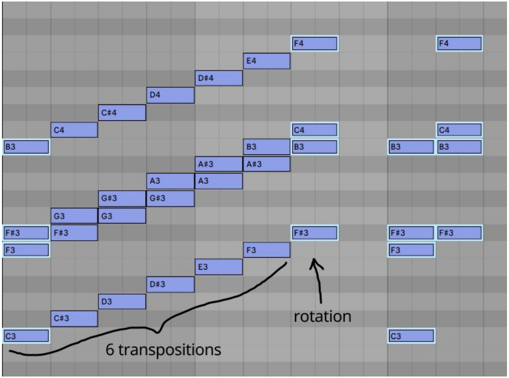


# Grado distinto a 1 de simétria

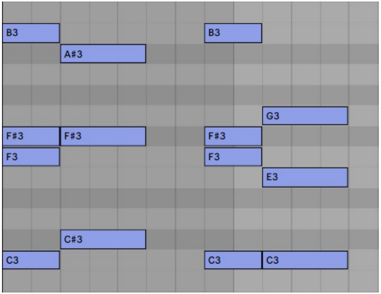
El mayor grado de simétria es $n$, i.e. los acordes asimétricos.



# Grado 2 de simétria



# Grado 2 de simétria



Gracias por su atención