TUTORIAL: LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

MIGUEL MORENO

Abstract. En este tutorial se da una introducción a la función exponencial, su definicion por series de potencias, su derivada y algunas propiedades.

Agradecimientos

Este tutorial nace de las preguntas de unos estudiantes de la plataforma educativa Patzi, a los cuales agradezco por la motivación para escribir este tutorial.

1. Introducción

La función exponencial es una de las mas útiles en matemáticas, esta tiene aplicaciones en calculo, álgebra y hasta en combinatoria. Muchas veces estas aplicaciones se explican sin ahondar en su origen, esto se puede deber a muchas razones como falta de tiempo, objetivos de la clase, etc. Esto origina muchas preguntas en los estudiantes tales como *¿Por qué es tan útil la función exponencial?*, *¿De donde nace el numero e*, *¿Como se calcula la derivada de la función exponencial?*, etc. En este tutorial vamos a responder algunas de estas preguntas.

Usualmente la función exponencial se explica como la potenciación de la constante e. Con esta definición es fácil ver que algunas propiedades da la función exponencial son ciertas, tales como

$$e^0 = 1,$$
$$e^{x+y} = e^x e^y.$$

Por otro lado, esta definicion de la función exponencial no es útil para calcular la derivada de la función exponencial

$$\frac{de^x}{dx} = e^x.$$

Claramente para responder estas preguntas de una manera sencilla, vamos a necesitar una definicion equivalente de la función exponencial. Para ello usaremos una serie de potencias para definir una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por series de potencias que cumpla las siguientes propiedades:

(1) $e^0 = 1$,
(2) $\frac{de^x}{dx} = e^x$.

Luego mostraremos que esta función es la función exponencial y probaremos algunas propiedades de la función exponencial.

Estructura del tutorial. Las primeras dos secciones están dedicadas a los resultados necesarios para las siguientes secciones. En la tercer sección definiremos la función por series de potencias. En la cuarta sección calcularemos su derivada y mostraremos que es la función exponencial. En la quinta sección probamos algunas propiedades de la función exponencial. La sexta sección esta dedicada a la función inversa de la función exponencial. La séptima sección esta dedicada a la función exponencial en los números complejos. Este tutorial termina con unos ejercicios en la octava sección.

2. Preliminares

Notación. Vamos a denotar por $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ la sucesión $a_0, a_1, a_2, \ldots$, donde los números a_i son reales.

Vamos a denotar por $\sum_{i=0}^{n} a_i$ la suma $a_0 + a_1 + \ldots + a_n$. Decimos que una serie converge si existe un numero L tal que $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i = L$

Vamos a denotar por $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ la suma infinita $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ y por ende $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = L$. Decimos que la serie definida por $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es la suma $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$.

Para todo numero real x, denotaremos por $|x|$ el valor absoluto de x,

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{if } x \geq 0; \\ -x, & \text{if} x < 0. \end{cases}$$

Para todo numero entero positivo denotaremos por $n!$ el factorial de n,

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n.$$

Para cero definimos $0! = 1$.

Para todo par de números naturales $0 \leq k <\leq n$ denotaremos por $\binom{n}{k}$ el numero

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

La función logarítmica natural esta definida como

$$ln(a) = \int_1^a \frac{1}{x} dx.$$

Resultados previos. Los siguientes resultados serán útiles durante el tutorial.

(1) Para todo entero positivo n se cumple la siguiente identidad

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + x^2y^{n-3} + x^1y^{n-2} + y^{n-1}).$$

(2)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

(3) Para todo n entero, la derivada del polinomio $P(x) = x^n$ es nx^{n-1}.
(4) La derivada de $g(x) + f(x)$ es $g'(x) + f'(x)$.
(5) La derivada de $g(x)f(x)$ es $g'(x)f(x) + g(x)f'(x)$.
(6) Si $g(x)$ es tal que $g'(x) = 0$, entonces existe un numero real c tal que $g(x) = c$ para todo x.
(7) El termino $(x+y)^n$ se expande como

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

3. Criterio del cociente

En esta sección estudiaremos el criterio del cociente para determinar si una serie converge. Empecemos por mirar ejemplos de series.

Empecemos por la serie definida por los naturales, esta es la serie definida por la sucesión $\{i\}_{i\in\mathbb{N}}$,

$$\sum_{i=0}^{\infty} i$$

, es fácil ver que esta serie crece de forma infinita. Para ver esto tomemos un numero entero cualquiera n, es fácil ver que $\sum_{i=0}^{n+1} a_i > n$. Por lo que si esta series fuese convergente, $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i = L$, L seria un numero mayor a cualquier otro numero natural lo cual es imposible.

Ahora miremos la serie definida por la sucesión $\{\frac{1}{2^i}\}_{i\in\mathbb{N}}$,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i}.$$

Tomemos la suma de los primeros n elementos de la sucesión,

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i}$$

y multipliquemos por $1 = \frac{1-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$,

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} = \frac{(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}$$

Aplicando la identidad (1) de los resultados previos obtenemos que

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} = \frac{(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1^{n+1}-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}.$$

Desarrollando la fracción obtenemos lo siguiente

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} = \frac{1^{n+1}-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{2-1}{2}} = \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}} = \frac{2-\frac{2}{2^{n+1}}}{1} = 2-\frac{1}{2^n}.$$

Ahora que tenemos una formula para calcular $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i}$, podemos calcular $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i}$. Sabemos que las potencias de dos crecen de forma infinita, en otras palabras si i tiende a infinito entonces 2^i tiende a infinito. Por la identidad (2) de los resultados previos, si i tiende a infinito entonces $\frac{1}{2^i}$ tiende a cero, en otras palabras $\lim_{i\to\infty} \frac{1}{2^i} = 0$, lo que implica

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} = 2.$$

Concluimos que

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2.$$

Ejercicio 3.1. *Mostrar que para todo $r > 1$, la serie $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{x^i}$ converge.*

Como hemos visto hay series que convergen y tienen un valor definido pero otras no. Como vimos usamos muchas ideas para saber si las series convergían o no, pero hay ciertos criterios que nos ayudan a determinar de manera mas sencilla si una serie converge o no.

Criterio del cociente. Sea $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{a_i}$ una serie donde $a_i \neq 0$ para todo $i \geq 0$ y el limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

existe. Sea

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = A$$

el criterio del cociente nos dice lo siguiente:

- Si $A < 1$ entonces $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{a_i}$ converge.
- Si $A > 1$ entonces $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{a_i}$ no converge.
- Si $A = 1$ entonces el criterio no aplica, toca usar otros métodos..

Estudiemos la convergencia de la serie $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ usando el criterio del cociente. Para ello tenemos que determinar el limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\frac{1}{2^{n+1}}|}{|\frac{1}{2^n}|}.$$

Desarrollando las fracciones tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\frac{1}{2^{n+1}}|}{|\frac{1}{2^n}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|2^n|}{|2^{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

por el criterio del cociente concluimos que la serie converge.

Ejercicio 3.2. *Usar el criterio del cociente para mostrar que la serie $\sum_{i=0}^{\infty} i$ no converge.*

Como podemos ver el criterio del cociente es muy útil y rápido para determinar si las series convergen.

4. La serie de potencias

En esta sección definiremos una función usando una serie. Hasta el momento hemos visto series convergentes que representa un numero, un único valor, esto se debe a el hecho que solo hemos visto series definidas por sucesiones $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en las que para todo i, a_i es un numero real. Pero que pasaría si a_i fuese una función en x ($a_i = g_i(x)$)?

Empecemos por un ejemplo sencillo, definamos la sucesión $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ por $a_i = \frac{1}{x^i}$. La serie definida por esta sucesión es $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{x^i}$, como vimos en la sección anterior si $x = 2$ entonces la serie converge a 2. Podríamos definir la función

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{x^i}$$

lo único que tendríamos que hacer es definir su dominio, en otras palabras, encontrar el conjunto $\{r \in \mathbb{R} \mid \text{ la serie } \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{r^i} \text{ converge}\}$. Por el ejercicio 3.1, sabemos que para todo $r > 1$, $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{r^i}$ converge.

Ejercicio 4.1. *Mostrar que $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{r^i} = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 1\}$. Basta con mostrar que si $r \leq 1$, $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{r^i}$ no converge.*

Ahora que tenemos noción de como definir una función usando una serie, definamos la siguiente función

$$F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

solo nos falta encontrar su dominio, $\{r \in \mathbb{R} \mid \text{ la serie } \sum_{i=0}^{\infty} \frac{r^n}{n!} \text{ converge}\}$. Usemos el criterio del cociente, para ellos miremos el limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{r^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{r^n}{n!}}.$$

Desarrollando la fracción obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{r}{n+1}.$$

Notemos que r es constante en $\lim_{n\to\infty} \frac{r}{n+1}$, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{r}{n+1} = 0$. Por el criterio del cociente concluimos que para todo numero r, $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{r^n}{n!}$ converge y el dominio de $F(x)$ es $\mathbb{R}$.

Por ultimo notemos que $F(0) = 1$, tal y como queremos.

Ejercicio 4.2. *Hallar el dominio de la función*

$$G(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

5. Derivada de F

En esta sección usaremos la derivada de $F(x)$ para mostrar que $F(x) = e^x$. Para calcular la derivada de $F(x)$ debemos calcular la derivada de cada uno de sus sumandos, esto lo podemos hacer usando (3) en los resultados previos:

$$F'(x) = 0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

Esto lo podemos reescribir como

$$F'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n)!}$$

de donde concluimos que $F'(x) = F(x)$.

La igualdad $F(x) = e^x$. Ya tenemos todo lo necesario par probar que $F(x) = e^x$. Definamos la función

$$H(x) = \frac{F(x)}{e^x} = F(x)e^{-x}.$$

Calculamos la derivada de H usando (5) en los resultados previos,

$$H'(x) = F'(x)e^{-x} + F(x)(-1)e^{-x}$$

como $F'(x) = F(x)$, obtenemos

$$H'(x) = F(x)e^{-x} - F(x)e^{-x} = 0.$$

Como $H'(x) = 0$, por (6) en los resultados previos, existe un numero real c tal que $H(x) = c$ para todo x. En otras palabras, existe un numero real c tal que

$$c = \frac{F(x)}{e^x}$$

de donde $ce^x = F(x)$ para todo x. Para terminar con nuestra prueba, solo nos falta encontrar el valor c. Como $F(0) = 1$ y $e^0 = 1$ concluimos

$$ce^0 = F(0)$$

$$c = 1$$

de donde

$$e^x = F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Ahora que tenemos una función equivalente de la función exponencial, podemos obtener una formula para el numero e,

$$e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Ejercicio 5.1. *Calcule una aproximación de e con cuatro decimales.*

6. Propiedades

En esta sección vamos a mostrar dos propiedades de la función exponencial.

Multiplicación de la función exponencial. Empezaremos por mostrar la identidad $e^{x+y} = e^x e^y$. Por la definicion de la función F podemos escribir e^{x+y} usando series

$$e^{x+y} = F(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

Aplicando (7) de los resultados previos, obtenemos

$$e^{x+y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}}{n!}.$$

Reescribiendo obtenemos

$$e^{x+y} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k}}{n!}$$

Desarrollando la expresión obtenemos

$$e^{x+y} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \right)$$

Como podemos ver en la expresión, para toda tripla h, m, n de números naturales tales que $h + m = n$ el termino $\frac{x^h}{h!} \cdot \frac{y^m}{(m)!}$ aparece en la suma infinita, de donde podemos reescribir la suma como sigue

$$e^{x+y} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \right) = \sum_{\substack{n,h,m \in \mathbb{N} \\ h+m=n}} \frac{x^h}{h!} \cdot \frac{y^m}{m!}.$$

Como en la suma infinita aparecen todos lo posibles valores de n y n no aparece en el termino $\frac{x^h}{h!} \cdot \frac{y^m}{m!}$ por lo que podemos reescribir la suma como

$$e^{x+y} = \left(\sum_{h=0}^{\infty} \frac{x^h}{h!} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \right).$$

Usando la definicion de $F(x)$ obtenemos

$$e^{x+y} = F(x) \times F(y) = e^x e^y.$$

Ejercicio 6.1. *Mostrar que la función exponencial es inyectiva, en otras palabras si $e^a = e^b$ entonces $a = b$*

Raíz enésima de e. Vamos a terminar con esta sección mostrando que para todo numero entero positivo n, la ecuación $e^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{e}$ es cierta. Para mostrar esto usaremos la identidad de la multiplicación

$$\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n = \underbrace{e^{\frac{1}{n}} \cdot e^{\frac{1}{n}} \cdot \cdots \cdot e^{\frac{1}{n}}}_{n \text{ multiplicaciones}} = e^{\overbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}^{n \text{ sumas}}} = e^{\frac{n}{n}} = 1$$

Con esto mostramos que el numero $r = e^{\frac{1}{n}}$ es tal que $r^n = e$, lo cual nos dice que $r = \sqrt[n]{e}$. Ahora que tenemos esta identidad podemos deducir que

$$\sqrt[2]{e} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})^n}{n!}.$$

Ejercicio 6.2. *Calcular una aproximación de $e^{\frac{1}{\pi}}$ con cuatro decimales.*

7. La función inversa

Para terminar nuestro estudio sobre la función exponencial vamos a estudiar su función inversa. Detonemos por F^{-1} la función inversa de F, donde F es la función exponencial escrita como serie. Por la definicion de función inversa, sabemos que

$$F(F^{-1})(x) = x$$

si derivamos en ambas partes de nuestra ecuación, obtenemos

$$F'(F^{-1}(x)) \cdot (F^{-1})'(x) = 1.$$

Como $F'(x) = F(x)$, podemos reescribir la ecuación como

$$F(F^{-1}(x)) \cdot (F^{-1})'(x) = 1$$

como F y F^{-1} son funciones inversas, obtenemos

$$x(F^{-1})'(x) = 1.$$

Despejando obtenemos

$$(F^{-1})'(x) = \frac{1}{x}.$$

Por otra parte, sabemos que

$$e^0 = F(0) = 1$$

por lo que la función inversa cumple $F^{-1}(1) = 0$. Finalmente por la definicion de el logaritmo natural tenemos

$$ln(a) = \int_1^a \frac{1}{x} dx$$

por otro lado $(F^{-1})'(x) = \frac{1}{x}$ y $F^{-1}(1) = 0$, de donde

$$ln(a) = \int_1^a \frac{1}{x} dx$$

$$\int_1^a \frac{1}{x} dx = F^{-1}(x)\Big|_1^a$$

$$\int_1^a \frac{1}{x} dx = F^{-1}(a) - F^{-1}(1)$$

$$\int_1^a \frac{1}{x} dx = F^{-1}(a)$$

$$ln(a) = F^{-1}(a).$$

Ejercicio 7.1. *Mostrar que la siguiente identidad es verdadera*

$$ln(a) + ln(b) = ln(ab).$$

8. La función exponencial en complejos

Terminaremos este tutorial mirando la función exponencial en los complejos. Mostraremos una aplicación de esta función para mostrar la ecuación mas bella de las matemáticas.

La función exponencial en los complejos se puede definir usando la misma serie que usamos en la sección 4, la única diferencia es que ahora la variable sera z y puede tomar valores complejos

$$e^z = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Podemos ver que la derivada de de e^z es e^z. Pero no es la única forma de definir la exponencial compleja, definamos la siguiente función

$$h(z) = e^(- iz)(cos(z) + isen(z))$$

al derivar esta función obtenemos

$$h'(z) = -ie^{-iz}(cos(z) + isen(z)) + e^{-iz}(-sen(z) + icos(z))0$$
$$h'(z) = -ie^{-iz}cos(z) + i^2e^{-iz}sen(z) - e^{-iz}sen(z) + ie^{-iz}cos(z)) = 0$$

como $h'(z) = 0$ entonces h es una función constante. Como $h(0) = e^(0)(cos(0) + isen(0)) = 1$, concluimos que

$$e^(iz) = cos(z) + isen(z).$$

Para terminar el tutorial evaluemos la función exponencial en π

$$e^{i\pi} = cos(\pi) + isen(\pi)$$
$$e^{i\pi} = -1$$
$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

que es la ecuación mas bella de las matemáticas.

9. Ejercicios

Ejercicio 9.1. *Mostrar que la serie* $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ *no converge.*

Ejercicio 9.2. *Hallar el dominio de la función*

$$g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Ejercicio 9.3. *Derivar* $g(x)$ *de el anterior ejercicio.*

Ejercicio 9.4. *Mostrar que el codominio de la función exponencial es el intervalo* $(0.\infty)$*.*

Ejercicio 9.5. *Mostrar que la siguiente identidad es verdadera*

$$ln(a^{\frac{1}{n}}) = \frac{ln(a)}{n}.$$

URL: `https://www.miguelmath.com/`